Semántica Proposicional

Curso 2014-2015

Mari Carmen Suárez de Figueroa Baonza
mcsuarez@fi.upm.es

POLITÉCNICA

Contenidos

- Introducción
- Interpretación de FBFs proposicionales
- Validez
- Satisfacibilidad
- Validez y Satisfacibilidad
- Consecuencia Lógica
- Equivalencia Lógica

Introducción a la Semántica (I)

- ¿Qué es la semántica?
  - Estudia el **significado de los símbolos**
    - Se introduce el concepto de interpretación (conjunto de reglas precisas que permiten asignar objetos de un dominio a ciertas expresiones de un lenguaje formal)
  - Asigna un **significado a las construcciones sintácticas**
    - Junto con la sintáctica ayuda a definir un sistema formal
    - Sin significado todas las formulas proposicionales son sintácticamente diferentes unas de otras, excepto si son la misma cadena de símbolos
    - La introducción de la semántica a las fórmulas proposicionales consiste en reducir todas las situaciones posibles a dos: cierto o **verdadero** y **falso**
    - Aparece entonces una relación de **equivalencia entre fórmulas** que permite identificar fórmulas equivalentes

Introducción a la Semántica (II)

- Hemos visto (informalmente) qué es un **razonamiento válido**:
  - siempre que las premisas del razonamiento sean ciertas, necesariamente la conclusión ha de serlo también
  - la verdad de las premisas es incompatible con la falsedad de la conclusión
  - la conclusión es consecuencia lógica de las premisas
- Objetivo del tema:
  - Definir con precisión el concepto de **consecuencia lógica**

Introducción a la Semántica (III)

- Una **proposición** es una condición/afirmación posible del mundo sobre el que queremos decir algo
  - Una proposición puede ser Verdadera o Falsa (**valor de verdad**)
  - Proposiciones simples:
    - su valor de verdad no depende de otra proposición
  - Proposiciones compuestas:
    - su valor de verdad depende del que tengan las proposiciones simples que la definan y
    - del significado de las conectivas

Interpretación de FBFs proposicionales (I)

- **Interpretación**: i(FBF proposicional) = V / F
- Una **función de interpretación (i)** (también llamada valoración o interpretación) es un dispositivo formal para asignar un valor de verdad a todas y cada una de las FBFs de un lenguaje proposicional
  - LP es un lenguaje proposicional, $i: FBF_{LP} \Rightarrow \{V, F\}$
- Una vez asignado el valor de verdad a las proposiciones simples, las fórmulas compuestas (no atómicas) pueden ser también interpretadas:
  - $i(\neg A) = V$ sii $i(A) = F$
  - $i(A \wedge B) = V$ sii $i(A) = i(B) = V$
  - $i(A \vee B) = V$ sii $i(A) = V$ o $i(B) = V$
  - $i(A \rightarrow B) = V$ sii $i(A) = F$ o $i(B) = V$
  - $i(A \leftrightarrow B) = V$ sii $i(A) = i(B)$
  - siendo A y B FBFs de un lenguaje proposicional

Interpretación de FBFs proposicionales (II)

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Ejercicios (de semántica) (I)

- "Si se es menor de tres años, se va a la escuela infantil. Si se tienen tres años o más, se va al colegio o al trabajo. Luego se va a la escuela infantil, al colegio o al trabajo"
  - Sea LP un lenguaje proposicional con los símbolos de proposición {p, q, r, s} y las conectivas $\{\neg, \rightarrow, \vee\}$
  - Significado informal de las proposiciones:
    - p: se es menor de tres años
    - q: se va a la escuela infantil
    - r: se va al colegio
    - s: se va al trabajo
  - Formalización:
    - Si se es menor de tres años, se va a la escuela infantil: $\mathbf{p \rightarrow q}$
    - Si se tienen tres años o más, se va al colegio o al trabajo: $\mathbf{\neg p \rightarrow r \vee s}$
    - Se va a la escuela infantil, al colegio o al trabajo: $\mathbf{q \vee r \vee s}$

Ejercicios (de semántica) (I)

- Resolver:
  - Asignación de significado a premisas y conclusión cuando
    - $i(p) = i(q) = i(r) = i(s) = V$
  - Asignación de significado a premisas y conclusión cuando
    - $i(p) = i(q) = i(r) = i(s) = F$

Ejercicios (de semántica) (II)

- Asignar significado a las siguientes fórmulas cuando i(p) = i(q)= V e i(r) = F
  - $(p \rightarrow q \vee r) \rightarrow (p \wedge q \rightarrow \neg r)$
  - $(p \wedge (\neg q \vee \neg r)) \leftrightarrow (\neg(p \vee q) \rightarrow r)$

- Asignar significado a las siguientes fórmulas para toda posible interpretación
  - $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
  - $(\neg p \rightarrow q) \wedge (\neg q \wedge p)$
  - $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$

Ejercicios (de semántica) (III)

- Asignar significado a las siguientes fórmulas para toda posible interpretación

p	**q**	**¬p v q**	**¬p ∧ q**	**¬p → q**	**¬p ↔ q**	**p v ¬p**	**p ∧ ¬p**
V	V						
V	F						
F	V						
F	F						

Ejercicios (de semántica) (III)

- Asignar significado a las siguientes fórmulas para toda posible interpretación

p	**q**	**$\neg p \vee q$**	**$\neg p \wedge q$**	**$\neg p \rightarrow q$**	**$\neg p \leftrightarrow q$**	**$p \vee \neg p$**	**$p \wedge \neg p$**
V	V	V	F	V	F	V	F
V	F	F	F	V	V	V	F
F	V	V	V	V	V	V	F
F	F	V	F	F	F	V	F

Validez (I)

- Atendiendo a su semántica, las FBFs pueden clasificarse en
  - **Contradicción** sii no existe una interpretación i tal que i(A) = V
  - **Válida (o tautología)** sii no existe una interpretación i tal que i(A) = F (se representa $\vDash$ A)
  - **Contingente** sii existe alguna interpretación i tal que i(A) = V y existe alguna interpretación i' tal que i'(A) = F
- También se puede decir que
  - Una fórmula A es válida sii ¬A es una contradicción
  - Una fórmula A es contingente sii ¬A es contingente

Validez (II)

- **Contradicción** sii no existe una interpretación i tal que i(A) = V
  - Las fórmulas que son falsas para cualquier posible asignación de valores de verdad de sus constituyentes, se denominan contradicciones
  - Ejemplos:

p	$\wedge$	$\neg$	p
V	F	F	V
F	F	V	F

q	$\wedge$	$\neg$	(p	$\vee$	q)
V	F	F	V	V	V
F	F	F	V	V	F
V	F	F	F	V	V
F	F	V	F	F	F

(p	$\wedge$	q)	$\rightarrow$	$\neg$	q
V	V	V	F	F	V
F	F	V	F	F	V
V	F	F	F	V	F
F	F	F	F	V	F

Validez (III)

- **Válida (o tautología)** sii no existe una interpretación i tal que $i(A) = F$ (se representa $\vDash A$)
  - Las fórmulas que son verdaderas para cualquier posible asignación de valores de verdad de sus constituyentes, se denominan tautologías
  - Ejemplos

p	→	p
V	V	V
F	V	F

p	→	(q	→	p)
V	V	V	V	V
F	V	V	F	F
V	V	F	V	V
F	V	F	V	F

p	→	(¬	p	→	q)
V	V	F	V	V	V
F	V	V	F	V	V
V	V	F	V	V	F
F	V	V	F	F	F

Validez (IV)

- **Contingente** sii existe alguna interpretación i tal que i(A) = V y existe alguna interpretación i’ tal que i’(A) = F
  - Las fórmulas que son verdaderas en algunas interpretaciones y falsas en otras, se denominan contingencias
  - Ejemplos

p	$\wedge$	p
V	V	V
F	F	F

(p	$\vee$	q)	$\rightarrow$	q)
V	V	V	V	V
F	V	V	V	V
V	V	F	F	F
F	F	F	V	F

p	$\rightarrow$	(p	$\rightarrow$	$\neg$	q)
V	F	V	F	F	V
F	V	F	V	F	V
V	V	V	V	V	F
F	V	F	V	V	F

Ejercicios (de semántica)

- Determinar para cada una de las siguientes fórmulas si es válida, contradictoria o contingente, indicando la(s) interpretación(es) que lo demuestran:
    1. $p \wedge q \rightarrow p$
    2. $p \vee q \rightarrow p$
    3. $p \rightarrow \neg p$
    4. $p \vee q \rightarrow (r \vee s \rightarrow p)$
    5. $(p \rightarrow q) \wedge (p \wedge \neg q)$
    6. $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$
    7. $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
    8. $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
    9. $(p \rightarrow \neg q) \wedge \neg(r \wedge \neg p) \rightarrow (q \rightarrow \neg r)$
    10. $(p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$
    11. $\neg(p \rightarrow q) \leftrightarrow p \wedge \neg q$
    12. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$
    13. $p \rightarrow (q \wedge \neg q \rightarrow \neg p)$
    14. $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
    15. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q \wedge r))$

Satisfacibilidad

- Dado un lenguaje proposicional LP
  - Una interpretación i **satisface** una fórmula $A \in FBF_{LP}$ sii $i(A) = V$
  - Una fórmula $A \in FBF_{LP}$ es **satisfacible** sii existe (al menos) una interpretación i tal que $i(A) = V$
  - Una fórmula $A \in FBF_{LP}$ es **insatisfacible** sii no existe ninguna interpretación i tal que $i(A) = V$
  - Para conjuntos de fórmulas $\{A1,\dots,An\}$, $Ai \in FBF_{LP}$ para todo i: $1 \leq i \leq n$:
    - Una interpretación i **satisface** $\{A1,\dots,An\}$ sii $i(Ai) = V$ para todo i: $1 \leq i \leq n$
- Además
  - Una interpretación que satisface una fórmula es un **modelo** de la fórmula
  - Una interpretación que hace falsa una fórmula es un **contramodelo** de la fórmula

Validez y Satisfacibilidad

- De las definiciones anteriores se pueden establecer las siguientes equivalencias
  - Una fórmula es **válida** sii
    - no tiene contramodelos sii
    - todas sus interpretaciones son modelos sii
    - todas sus interpretaciones la satisfacen
  - Una fórmula es una **contradicción** sii
    - no tiene modelos sii
    - todas sus interpretaciones son contramodelos sii
    - es insatisfacible
  - Una fórmula es **contingente** sii
    - tiene modelos y contramodelos

Ejercicios (I)

- Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F).
  - Una fórmula bien formada A se dice que es contingente si existe al menos un contramodelo de dicha fórmula A
    - Falsa. Una fórmula es contingente cuando puede ser verdadera o falsa, es decir, cuando tiene al menos un modelo y al menos un contramodelo
  - La negación de una contradicción siempre será una tautología, y la negación de una tautología será una contradicción
    - Verdadera
  - A es satisfacible si y sólo si A no es una contradicción
    - Verdadera
  - A es una tautología si y sólo si ¬A es contingente
    - Falsa
  - Una fórmula A es insatisfacible sí y sólo si es también contradicción
    - Verdadera. Para una fórmula insatisfacible y para una contradicción, todas las interpretaciones la hacen falsa

Ejercicios (II)

- Demostrar, mediante una interpretación, que la siguiente fórmula es satisfacible
  - $\underbrace{(s \leftrightarrow \neg p)}_{A} \wedge \underbrace{((q \vee r) \rightarrow (p \wedge s))}_{B}$
- Buscamos una interpretación que haga verdaderas A y B:
  - i(A) = V
    - $i(s) = V$ y $i(\neg p) = V$, por ejemplo $i(s) = V$ $i(p) = F$
  - $i(B) = i(\,(q \vee r) \rightarrow (p \wedge s)\,) = V$
    - $i(p) = F$ $i(p \wedge s) = F$

    $\Big\}$ $i(q \vee r) = F$ $i(q) = i(r) = F$
  - Esta interpretación, $i(s) = V$, $i(p) = i(q) = i(r) = F$, hace Verdadera la fórmula dada y, por tanto, **satisfacible**

Ejercicios (III)

- Encontrar, si existen, un modelo y un contramodelo para cada una de las siguientes fórmulas:
  - $p \wedge \neg s \leftrightarrow (r \rightarrow \neg (s \wedge r))$
    - Modelo:
      - i(p) = verdadero; i(r) = verdadero; i(s) = falso
    - Contramodelo:
      - i(p) = falso; i(r) = verdadero; i(s) = falso
  - $\neg (p \vee q \rightarrow \neg p \wedge (p \leftrightarrow q))$
    - Modelo:
      - i(p) = verdadero; i(q) = verdadero
    - Contramodelo:
      - i(p) = falso; i(q) = falso

Ejercicios (IV)

- Dadas las siguientes fórmulas decir para cada una de ellas si es válida, contingente, contradicción o no es posible saber con certeza qué es, a partir de la información disponible sobre A, B, C y D (donde A, B, C y D son fórmulas cualesquiera):
  - $A \vee \neg B$ sabiendo que B es insatisfacible
  - $(C \vee B) \rightarrow (C \vee A)$ sabiendo que B es insatisfacible
  - $\neg (A \vee \neg B) \wedge (C \rightarrow \neg B)$ sabiendo que B es válida, A es insatisfacible
  - $\neg A \wedge [A \rightarrow (B \vee \neg A)]$ sabiendo que A es válida, B es insatisfacible

Consecuencia Lógica (I)

- Dado un lenguaje proposicional LP, un conjunto de fórmulas {A1,…,An}, Ai $\in$ FBF_{LP} para todo i:1$\leq$i$\leq$n, y una fórmula B $\in$ FBF_{LP}
- **Consecuencia lógica**:
  - B es consecuencia lógica de {A1,…,An} (**[A1,…,An] $\models$ B**)
  - sii toda interpretación que satisface {A1,…,An} también satisface B
  - sii no existe ninguna interpretación que satisfaga {A1,…,An} y no satisfaga a B

Consecuencia Lógica (II)

- **Argumento correcto**:
  - Un argumento con premisas {A1,…, An} y conclusión B es **correcto** sii [A1,…, An] $\models$ B
    - En un argumento válido, la conclusión se sigue de las premisas
      - Esto ocurre cuando no es posible que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa
  - Para decidirlo se pueden hacer dos análisis:
    - (1) Ver si **todas** las interpretaciones que satisfacen {A1,…,An} también satisfacen B, o bien
    - (2) Ver que **no existe ninguna** interpretación que satisfaga {A1,…,An} y no satisfaga B
  - El caso (1) requiere examinar todas las interpretaciones posibles y ver si se cumple la condición
  - En el caso (2) podemos centrarnos en definir una interpretación i tal que i({A1,…, An}) = V y i(B) = F
    - Si existe, esa interpretación es un contramodelo del argumento

Consecuencia Lógica: Ejemplo (I)

- Analizar si se cumple la relación de consecuencia lógica:

todas las interpretaciones posibles

$$\{ p \rightarrow (q \rightarrow r), p \wedge q \} \vDash r$$

$i(p)$	$i(q)$	$i(r)$	$i(q \rightarrow r)$	$i(p \rightarrow (q \rightarrow r))$	$i(p \wedge q)$	$i((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \wedge (p \wedge q))$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F
V	F	V	V	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	V	V	F	F
F	V	F	F	V	F	F
F	F	V	V	V	F	F
F	F	F	V	V	F	F

De todas las interpretaciones posibles, sólo una hace verdad a las dos premisas, y esa interpretación también hace verdad a la conclusión. Por tanto, **sí hay relación de consecuencia lógica**

Consecuencia Lógica: Ejemplo (II)

- Analizar si se cumple la relación de consecuencia lógica:
  - $\{ p \wedge \neg\neg q, r \} \vDash q \vee s$
- Tratamos de definir un contramodelo del argumento:
  - $i(p \wedge \neg\neg q) = V$ sii
    - $i(p) = V$ y
    - $i(\neg\neg q) = V$ sii $i(\neg q) = F$ sii $\boxed{i(q) = V}$
  - $i(r) = V$
  - $i(q \vee s) = F$ sii
    - $\boxed{i(q) = F}$ y
    - $i(s) = F$

Hay contradicción

- Puesto que no es posible definir un contramodelo, el argumento es correcto: **hay relación de consecuencia lógica** entre las premisas y la conclusión

Consecuencia Lógica: Ejemplo (III)

- Analizar si se cumple la relación de consecuencia lógica:
  - $\{ p \wedge q, \neg(p \rightarrow r) \} \vDash q \wedge (p \rightarrow r)$
- Tratamos de definir un contramodelo del argumento:
  - $i(p \wedge q) = V$ sii
    - $i(p) = V$ y
    - $i(q) = V$
  - $i(\neg(p \rightarrow r)) = V$ sii $i(p \rightarrow r) = F$
    - $i(p) = V$ y
    - $i(r) = F$
  - $i(q \wedge (p \rightarrow r)) = F$ sii
    - $i(q) = F$

    o bien
    - $i(p \rightarrow r) = F$ sii
      - $i(p) = V$ y
      - $i(r) = F$

Hay contradicción

Son compatibles

Consecuencia Lógica: Ejemplo (III)

- Analizar si se cumple la relación de consecuencia lógica:
  - $\{ p \wedge q, \neg(p \rightarrow r) \} \vDash q \wedge (p \rightarrow r)$
- Sí es posible definir un contramodelo del argumento: $i(p) = i(q) = V$, $i(r) = F$, por tanto el argumento no es correcto: **no hay relación de consecuencia lógica**

Ejercicios (I)

- Determinar si las siguientes argumentaciones son correctas. Si no lo son, indicar la interpretación que lo demuestra (contramodelo)

1. $[p, p \rightarrow q] \vDash q$
2. $[\neg p, p \vee q] \vDash q$
3. $[p \rightarrow q, \neg p] \vDash \neg q$
4. $[p \rightarrow q, \neg q] \vDash \neg p$
5. $[p \leftrightarrow q, \neg p] \vDash q$
6. $[p \wedge q] \vDash p$
7. $[\neg(p \wedge q)] \vDash \neg p \wedge \neg q$
8. $[\neg(p \vee q)] \vDash \neg p \wedge \neg q$

Ejercicios (II)

- Decir si la siguiente afirmación es verdadera (V) o falsa (F)
  - Dadas las fórmulas A1, A2, A3 y B, si existe una interpretación que satisface tanto A1, A2 y A3, como B, podemos afirmar que B es consecuencia lógica (|=) de A1, A2 y A3
    - Falsa. TODAS las interpretaciones que satisfagan A1, A2 y A3, tienen que satisfacer B (no es suficiente sólo con una), para que B sea consecuencia lógica de A1, A2 y A3

Ejercicios (III)

- Determinar si las siguientes argumentaciones son correctas. Si no lo son, indicar la interpretación que lo demuestra (contramodelo)

1. $\{p \to q, p\} \models q$
2. $\{p \vee q\} \models q \vee p$
3. $\{p \wedge (q \vee r)\} \models p$
4. $\{p \vee q \to r\} \models q \to r$
5. $\{\neg\neg r \wedge \neg q\} \models \neg r$
6. $\{p \to (q \to r)\} \models q \to (p \to r)$
7. $\{\neg q \to r, t \to \neg q, \neg s \to \neg q\} \models t \vee \neg s \to r$
8. $\{p \vee (q \to r) \to q, p\} \models q$
9. $\{\neg p \to \neg s, \neg p \vee r, r \to \neg t\} \models \neg s \vee \neg t$
10. $\{(p \to q) \wedge t, (r \vee p) \wedge \neg q, \neg t \leftrightarrow \neg s\} \models r \wedge s$

Ejercicios (IV)

- Formalizar el siguiente argumento, decidiendo si es o no válido (es decir, la conclusión es consecuencia lógica de las premisas):
  - Andrea aprende Lógica si estudia y va a clase. Si Andrea no va a clase o no estudia, puede pasear por el campo. Si Andrea puede pasear por el campo no aprende Lógica. En consecuencia, Andrea no aprende Lógica.

Ejercicios (V)

- Formalizar el siguiente razonamiento y demostrar con métodos semánticos si el razonamiento es o no correcto
  - O Juan va a París o no se queda en casa. Si viaja en barco, no va a París. Por consiguiente, si Juan se queda en casa, no viaja en barco

Ejercicios (VI)

- Formalizar empleando las variables proposicionales indicadas y analizar el siguiente argumento, determinando si hay o no hay relación de consecuencia:
  - Que llueva (p) y haga sol (s) son condiciones necesarias para tener una buena cosecha (c). Basta con que haga sol para que el turismo se anime (t). O evitamos el calentamiento global (q) o no llueve. Tenemos una buena cosecha. En conclusión, el turismo se anima y evitamos el calentamiento global
- Es posible definir un contramodelo y por tanto
  - Hay consecuencia lógica
  - No hay consecuencia lógica
- Es imposible definir un contramodelo y por tanto
  - Hay consecuencia lógica
  - No hay consecuencia lógica

Ejercicios (VII)

- Formalizar empleando las variables proposicionales indicadas y analizar el siguiente argumento, determinando si hay o no hay relación de consecuencia entre premisas y conclusión
  - Si no es cierto que se pueda ser rico (p) y dichoso (q) a la vez, entonces o bien la vida está llena de frustraciones (r) o bien la vida no merece vivirse (s). Se puede no ser dichoso y que la vida merezca vivirse. Por consiguiente, la vida está llena de frustraciones

- Es posible definir un contramodelo y por tanto
  - Hay consecuencia lógica
  - No hay consecuencia lógica
- Es imposible definir un contramodelo y por tanto
  - Hay consecuencia lógica
  - No hay consecuencia lógica

Ejercicios (VIII)

- Formalizar el siguiente razonamiento y analizar si es o no correcto:
  - Al lógico Ceferino le preguntaron: ¿amas a Queta, a Petra o a Rosana?
  - El pensó: los hechos son:
    - Amo al menos a una de las tres. Si amo a Petra pero no a Queta, entonces amo a Rosana. O bien amo a Queta y a Rosana, o no amo a ninguna de las tres. Si amo a Queta, entonces también amo a Petra
  - Contestó:
    - Amo a las tres

Ejercicios (IX)

- Probar
  - $\{p \rightarrow u, q \rightarrow u, r \rightarrow u, s \rightarrow u, t \rightarrow u\} \vDash B$, donde la fórmula B es:
    - $p \wedge q \wedge r \wedge s \wedge t \rightarrow u$
    - $p \vee q \vee r \vee s \vee t \rightarrow u$

- Probar que la siguiente fórmula es tautología, de manera semántica pero sin utilizar tablas de verdad:
  - $(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q \wedge r))$

Ejercicios (X)

- Demostrar con métodos semánticos si el razonamiento es o no correcto
  - Al repostar en la gasolinera A, usando la tarjeta del seguro tengo 1 euro de descuento; si voy a la gasolinera B y uso la tarjeta del banco tengo 2 euros de descuento; voy a repostar en A o en B, pero no en las dos; por lo tanto voy a tener un descuento de 3 euros

Ejercicios (XI)

- Dado el siguiente argumento:
  - Cuando Eduardo no juega al baloncesto, juega al tenis.
  - Cuando juega al tenis, juega al fútbol.
  - No juega al fútbol.
  - Por tanto, Eduardo juega al baloncesto.
- Formalizar los cuatro enunciados y averiguar si ese razonamiento es o no válido

Ejercicios (XII)

- Determinar la corrección del siguiente argumento:
  - Se sabe que
    - Los animales con pelo o que dan leche son mamíferos
    - Los mamíferos que tienen pezuñas o que rumian son ungulados
    - Los ungulados de cuello largo son jirafas
    - Los ungulados con rayas negras son cebras
  - Se observa un animal que tiene pelos, pezuñas y rayas negras. Por consiguiente, se concluye que el animal es una cebra

Equivalencia Lógica (I)

- Dos fórmulas A y B son **(lógicamente) equivalentes** (**$A \leftrightarrow B$, $A \equiv B$**) sii para toda interpretación i se cumple que $i(A) = i(B)$
- Esta definición implica que:
  - A y B son consecuencia lógica una de la otra ($A \vDash B$ y $B \vDash A$)
  - La fórmula $A \leftrightarrow B$ es válida (es una tautología)
- Por ejemplo: $p \rightarrow q \leftrightarrow \neg p \vee q$

$i(p)$	$i(q)$	$i(p \rightarrow q)$	$i(\neg p \vee q)$	$i((p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q))$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Equivalencia Lógica (II)

- La equivalencia entre fórmulas proporciona numerosas ventajas prácticas:
  - **permite utilizar indistintamente las fórmulas equivalentes** en una demostración (lo utilizaremos más adelante)
  - **permite reducir el tamaño de un lenguaje proposicional** (disminuir el nº de conectivas que emplea)
    - Por ejemplo, cualquier lenguaje proposicional puede reducirse a otro que sólo utiliza {¬, v}
    - Esta reducción simplifica tareas como:
      - construcción de sistemas sintácticos de demostración
      - demostración de las propiedades metalógicas del sistema formal

Equivalencia Lógica (III)

- Algunas equivalencias lógicas muy utilizadas (I):
  - $\neg(\neg p) \equiv p$ — Doble negación
  - $p \wedge p \equiv p$ — Ley de idempotencia
  - $p \wedge q \equiv q \wedge p$ — Conmutatividad de la conjunción
  - $p \vee q \equiv q \vee p$ — Conmutatividad de la disyunción
  - $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$ — Asociatividad de la conjunción
  - $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ — Asociatividad de la disyunción
  - $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$ — La implicación como disyunción
  - $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ — Ley de De Morgan
  - $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ — Ley de De Morgan

Equivalencia Lógica (III)

- Algunas equivalencias lógicas muy utilizadas (II):
  - $\mathbf{p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)}$
    - Distributividad de la conjunción respecto a la disyunción
  - $\mathbf{p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)}$
    - Distributividad de la disyunción respecto a la conjunción
  - $\mathbf{p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)}$
    - Definición de la doble implicación en función de la implicación

Ejercicios

- Para los siguientes pares de fórmulas, ¿en cuáles se cumple A $\vDash$ B?, ¿en cuáles se cumple B $\vDash$ A?, ¿en cuáles A y B son equivalentes?

1. A: $p \wedge q$, B: $p \vee q$
2. A: $p \rightarrow q$, B: $q \rightarrow p$
3. A: $p \vee q \rightarrow r$, B: $p \rightarrow r$
4. A: $(p \rightarrow q) \rightarrow r$, B: $p \vee q \rightarrow r$
5. A: $p \rightarrow q$, B: $p \leftrightarrow q$

Semántica Proposicional

Curso 2014-2015

Mari Carmen Suárez de Figueroa Baonza
mcsuarez@fi.upm.es

POLITÉCNICA